Uitwerking Puzzel 92-6 Wobien Doyer

Magidoku's en verborgen symmetrieën Lieke de Rooij

Een Latijns vierkant van orde n, is een vierkante matrix, gevuld met n verschillende symbolen waarvan elk precies een keer per rij en een keer per kolom voorkomt. We kiezen hier voor de getallen 0 tot en met $n - 1$.

In een standaard magisch vierkant van orde n staan precies alle getallen van 1 tot en met n^2, zodanig dat de som van elke rij, elke kolom en ook elke diagonaal gelijk is. Wij kiezen hier voor de getallen 0 tot en met $n^2 - 1$, met $n \le 10$.

Grieks-Latijnse vierkanten (*GL*) zijn vierkanten van twee gecombineerde Latijnse vierkanten *G* en *L*. *G* is gevuld met n Griekse symbolen en *L* met n Latijnse symbolen. In elk vakje van het *GL* staan dan naast elkaar een Grieks en een Latijns symbool, afkomstig uit de overeenkomstige vakjes van *G* en *L*, vandaar de naam Grieks-Latijns vierkant. Bovendien moeten alle zo verkregen combinaties van twee symbolen verschillend zijn.

Euler deed uitgebreid onderzoek naar *GL's* en hij had het vermoeden dat er voor $n = 6$ en zelfs voor alle $n = 4k + 2$ geen *GL's* bestaan. Dat bleek later niet juist,[1] maar wel voor $n = 6$.

Als je de symbolen vervangt door n ($n \le 10$) rode en blauwe cijfers (*G* rood en *L* blauw), met in het *GL* rood links en blauw rechts, dan kunnen we dat zien als tweecijferige getallen. In het n-tallig stelsel zijn dat precies alle n^2 opvolgende waarden vanaf 0. Bijvoorbeeld voor $n = 3$: 00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22 .

En als we er bovendien voor zorgen dat in zowel *G* als *L* ook de diagonalen n verschillende cijfers bevatten, dan is *GL* een zuiver magisch vierkant in het n-tallige talstelsel. Merk op dat omgekeerd, (ook als n ongelijk 6) niet elk magisch vierkant voldoet aan de eisen van een *GL*.

We geven een voorbeeld voor $n = 4$ (zie figuur 1).

$$G = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2&1&3&0\\\hline 3&0&2&1\\\hline 0&3&1&2\\\hline 1&2&0&3\\\hline\end{array} \quad L = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0&3&2&1\\\hline 1&2&3&0\\\hline 3&0&1&2\\\hline 2&1&0&3\\\hline\end{array} \text{ geeft } GL = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 20&13&32&01\\\hline 31&02&23&10\\\hline 03&30&11&22\\\hline 12&21&00&33\\\hline\end{array} \quad \text{Of 10-tallig: } \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 8&7&14&1\\\hline 13&2&11&4\\\hline 3&12&5&10\\\hline 6&9&0&15\\\hline\end{array}$$

Figuur 1

Zo'n *GL* is dus een matrix van $n \cdot n$, waar elke rij, elke kolom en ook de beide diagonalen n verschillende rode (links) en n verschillende blauwe (rechts) cijfers bevatten. Bovendien zijn alle tweecijferige getallen in de matrix verschillend.

Het resultaat is een bijzonder magisch vierkant. We zullen na opgave 3 zien dat we met een *GL* makkelijk een heleboel andere verschillende *GL's* kunnen maken en dus ook allerlei magische vierkanten.

Voor deze puzzel maken we er een soort sudoku door slechts een beperkt aantal tweecijferige getallen in te vullen. De rest moet je zelf aanvullen. De linker cijfers (rood) en de rechter cijfers (blauw) vormen dus eigenlijk elk een sudoku (zonder blokken), waarin de rijen, de kolommen en ook de diagonalen precies alle cijfers 0 tot en met $n-1$ bevatten. Bovendien moeten de rood-blauwe getallen elk precies een keer voor komen.

Opgave 1. Verwijder zoveel mogelijk rood-blauwe getallen uit de *GL* ($n = 4$) van figuur 1, zodanig

dat er maar één manier is om hem weer aan te vullen tot een *GL*.
Oplossing: We kunnen een GL omzetten in een andere GL door ofwel op de rode ofwel op de blauwe cijfers een permutatie uit te voeren. Er moeten dus in de overgebleven getallen in elk geval 3 verschillende rode en 3 verschillende blauwe cijfers voorkomen, anders is er een permutatie mogelijk, zodat er meerdere manieren zijn om de figuur weer aan te vullen. Daarvoor hebben we minstens 3 rood-blauwe getallen nodig. Maar dan blijken er steeds 2 oplossingen mogelijk. Bij 4 rood-blauwe getallen (waarin in elk geval 3 verschillende rode en 3 verschillende blauwe cijfers voorkomen) blijkt steeds maar één oplossing te zijn.

Voorbeeld:

20	13		
	21		33

In het vakje onder 13 kan nu alleen 02 worden ingevuld. Zo verdergaand kunnen we alle vakjes eenduidig invullen.

	24			12
	13			
	42	34		
	30			

Figuur 2

Opgave 2a. Vul de *GL* ($n = 5$) van figuur 2 aan. Je kunt de 2^{e} kolom makkelijk invullen, maar daarna wordt het lastiger. Er is, zo als ook bij een goede sudoku, precies één oplossing.

Oplossing:

00	24	43	31	12
32	13	21	40	04
11	42	34	03	20
44	01	10	22	33
25	30	02	14	41

Na het invullen van 01 in het lege vakje in de 2^{e} kolom kan bv. De blauwe 0 in de 3^{e} kolom worden ingevuld. Zo kan stapje voor stapje het hele schema worden ingevuld.

Omdat het onderscheid al wordt gemaakt door de plaatsing links of rechts, laten we in het vervolg de kleuren rood en blauw weg.

		32				
	36	00				44
	04			41	12	
55	23					
	50					06

2b. Maak ook de *GL* ($n = 7$) van figuur 3 af.
Deze was erg lastig, maar is door Harm Bakker, Hans Linders en Gerard Bouwhuis goed opgelost.

Figuur 3

Oplossing:

40	11	32	26	05	54	63
13	36	00	51	62	25	44
66	04	53	35	41	12	20
55	23	64	02	10	46	31
01	65	16	43	24	30	52
22	50	45	14	33	61	06
34	42	21	60	56	03	15

Omdat in een Grieks-Latijns vierkant de symbolen geen waarde hebben kunnen we zonder verlies van algemeenheid de getallen 00 11 22 …., $(n-1)(n-1)$ op een rij, kolom of diagonaal plaatsen.
Opgave 3. Plaats de getallen 00, 11, 22, … op de hoofddiagonaal en onderzoek hoeveel mogelijkheden er dan zijn voor een *GL* met $n = 4$ en ook $n = 5$.
Oplossing voor $n = 4$:

00			
	11		
		22	
			33

In het vakje rechtsboven kan zowel links als rechts alleen 1 of 2 staan. Omdat 11 en 22 al gebruikt zijn, zijn de enige mogelijkheden 21 en 12.
Bij alle oplossingen waarin rechtsboven 21 staat hoort een oplossing waarin we de linker en rechter cijfers verwisselen met 12 rechtsboven. We hoeven dus maar één van beide te onderzoeken.
Als we 21 invullen, kunnen we vervolgens alle andere vakjes eenduidig bepalen:

00	32	13	21
23	11	30	02
31	03	22	10
12	20	01	33

Deze oplossing is ‘bijna’ symmetrisch in de hoofddiagonaal: in symmetrisch liggende vakjes staan de linker- en rechter cijfers verwisseld.
Samen met het ‘echte’ spiegelbeeld zijn er dus twee mogelijkheden.

Oplossing voor $n = 5$:

00				
	11			
		22		
			33	
				44

In het vakje rechtsboven kan nu zowel links als rechts alleen 1 of 3 staan. De enige mogelijkheden zijn 13 of 31, waarvan we er weer maar één hoeven te onderzoeken. Kiezen we voor 13, dan komt 31 linksonder:

00				13
	11			
		22		
			33	
31				44

In het middelste vakje van de bovenste rij kan nu alleen 41 of 34 staan. Beide mogelijkheden leiden tot één eenduidige oplossing. Er zijn dus 4 mogelijkheden, die allemaal dezelfde ‘bijna’ symmetrie hebben als bij n = 4.

Van een gegeven *GL* kunnen we nog op meerdere manieren andere *GL's* maken en dus ook meerdere magische vierkanten. De vraag is hoeveel. We kiezen voor een *GL* met de getallen 00, 11, 22, … op de hoofddiagonaal. We geven als voorbeeld in figuur 4 drie *GL's* met $n = 7$:

00	26	45	64	13	32	51
62	11	30	56	05	24	43
54	03	22	41	60	16	35
46	65	14	33	52	01	20
31	50	06	25	44	63	12
23	42	61	10	36	55	04
15	34	53	02	21	40	66

00	23	41	15	36	62	54
64	11	56	42	03	20	35
45	50	22	06	61	34	13
26	65	14	33	52	01	40
53	32	05	60	44	16	21
31	46	63	24	10	55	02
12	04	30	51	25	43	66

00	25	13	62	36	41	54
65	11	30	04	53	26	42
43	06	22	50	61	14	35
24	52	46	33	15	60	01
56	63	05	21	44	32	10
31	40	64	16	02	55	23
12	34	51	45	20	03	66

Figuur 4

De afbeeldingen die een gegeven *GL* kunnen omzetten in een nieuwe *GL* zijn:

a) Het hele vierkant roteren en/of spiegelen (het linker cijfer blijft daarbij linker cijfer).
b) De rode en blauwe cijfers in elk vakje van waarde verwisselen, dus bijvoorbeeld 35 verandert in 53.
c) Een permutatie van de rode cijfers en/of van de blauwe cijfers.

Geen van deze afbeeldingen op zich beeldt de *GL* op zichzelf af, maar combinaties ervan soms wel. Om preciezer te zijn, het gaat altijd om een rotatie of spiegeling in combinatie met b en/of c.
Zie bijvoorbeeld het eerste voorbeeld in figuur 4. Een spiegeling in combinatie met afbeelding b geeft precies het eerste voorbeeld terug. We hebben dus een afbeelding die de *GL* afbeeldt op zichzelf. We kunnen dat zien als een vorm van symmetrie.

We geven daarom de volgende definitie van symmetrie bij *GL's*:
Een *GL* is symmetrisch als er een niet-identieke afbeelding is die de *GL* op zichzelf afbeeldt. We kunnen de symmetrie nader specificeren door de rotatie of spiegeling te noemen die erbij betrokken is.

Zoals we hierboven al zagen wordt het eerste voorbeeld (in figuur 4) door afbeelding b in combinatie met spiegeling in de hoofddiagonaal op zichzelf afgebeeld.
Deze *GL* is dus symmetrisch door spiegeling in de hoofddiagonaal.

We hebben nu gezien dat afbeelding b in combinatie met spiegeling of rotatie een GL op zichzelf kan afbeelden, maar afbeelding c kan dat ook. Dat is alleen lastiger te zien omdat afbeelding c in het algemeen ingewikkelder is dan afbeelding b. We noemen het hier daarom een verborgen symmetrie.
Bij kleinere *GL's* blijkt er altijd een zekere (soms verborgen) symmetrie te zijn. Bijvoorbeeld figuur 1 heeft een symmetrie die niet gemakkelijk te herkennen is.

Doordat in onze voorbeelden de cijfercombinaties 00, 11 etc. in volgorde op de hoofddiagonaal staan is symmetrie door rotatie over 180 graden of spiegeling in de hoofddiagonaal zichtbaar te maken via een eenvoudige permutatie.

Opgave 4: Welke permutatie is dat en welke symmetrie(en) vind je zo in de drie voorbeelden?
Oplossing: Zowel bij spiegeling in de hoofddiagonaal als bij rotatie over 180 graden blijft de hoofddiagonaal op z'n plaats.
Bij rotatie over 180 graden draait de volgorde van de getallen op de hoofddiagonaal daarbij om. We kunnen de oorspronkelijke volgorde dan terugkrijgen door de permutatie $i \Leftrightarrow n-1-i$ zowel op de linker als op de rechter cijfers.
Doen we dat in het eerste voorbeeld dan krijgen we de oorspronkelijke matrix terug:

00	26	45	64	13	32	51
62	11	30	56	05	24	43
54	03	22	41	60	16	35
46	65	14	33	52	01	20
31	50	06	25	44	63	12
23	42	61	10	36	55	04
15	34	53	02	21	40	66

Oorspronkelijke matrix

66	40	21	02	53	34	15
04	55	36	10	61	42	23
12	63	44	25	06	50	31
20	01	52	33	14	65	46
35	16	60	41	22	03	54
43	24	05	56	30	11	62
51	32	13	64	45	26	00

na rotatie over 180 graden

00	26	45	64	13	32	51
62	11	30	56	05	24	43
54	03	22	41	60	16	35
46	65	14	33	52	01	20
31	50	06	25	44	63	12
23	42	61	10	36	55	04
15	34	53	02	21	40	66

na permutatie

Het eerste voorbeeld is dus, behalve symmetrisch door spiegeling in de hoofddiagonaal, ook nog symmetrisch door rotatie over 180 graden.

Doen we hetzelfde met het tweede voorbeeld, dan krijgen we niet precies dezelfde matrix terug, maar de matrix waarin de linker en rechter cijfers verwisseld zijn. Ook deze is dus symmetrisch t.o.v. rotatie over 180 graden, maar de bijbehorende afbeelding is dus een combinatie van b en c. In het derde voorbeeld lukt dit niet, dat is dus niet symmetrisch t.o.v. rotatie over 180 graden.

Met (combinaties van) rotatie over 180 graden, spiegeling in de hoofddiagonaal en spiegeling in de verticale as hebben we alle mogelijke spiegelingen en rotaties van het vierkant gehad. De spiegeling in de verticale as hebben we in opgave 4 nog niet gebruikt.

Opgave 5: Welke permutaties zijn nodig om te onderzoeken of er sprake is van (verborgen) symmetrie door spiegeling in de verticale as? In welke van onze drie voorbeelden is deze symmetrie aanwezig?
Tip: als die symmetrie er niet is hoef je de permutatie natuurlijk niet helemaal uit te voeren, maar let wel op dat je behalve de spiegeling in de verticale as ook eerder bekeken afbeeldingen nodig kunt hebben om de *GL* op zichzelf af te beelden.

Oplossing: Omdat in onze voorbeelden de cijfercombinaties 00, 11, 22, … op de hoofddiagonaal staan zal, als er sprake is van symmetrie in de verticale as, een permutatie die de cijfercombinaties op de stijgende diagonaal omzet in 00, 11, 22. … die symmetrie laten zien.
In het eerste voorbeeld is dat:
Linker cijfers: $5 \rightarrow 0$; $2 \rightarrow 1$; $6 \rightarrow 2$; $3 \rightarrow 3$; $0 \rightarrow 4$; $4 \rightarrow 5$; $1 \rightarrow 6$.
Rechter cijfers: $1 \rightarrow 0$; $4 \rightarrow 1$; $0 \rightarrow 2$; $3 \rightarrow 3$; $6 \rightarrow 4$; $2 \rightarrow 5$; $5 \rightarrow 6$.
Hieronder is die permutatie uitgevoerd op de stijgende diagonaal en op het vakje linksboven.
Het is daarmee duidelijk dat bij het eerste voorbeeld de permutatie geen spiegelbeeld van het origineel oplevert, ook niet met verwisseling van cijfers of na een rotatie over 180 graden.

00	26	45	64	13	32	51
62	11	30	56	05	24	43
54	03	22	41	60	16	35
46	65	14	33	52	01	20
31	50	06	25	44	63	12
23	42	61	10	36	55	04
15	34	53	02	21	40	66

Oorspronkelijke matrix

42						00
					11	
				22		
			33			
		44				
	55					
66						

Gedeeltelijke vulling na permutatie

Bij het tweede voorbeeld krijgen we een vergelijkbaar resultaat.

Bij het derde voorbeeld krijgen we met de permutatie:
Linker cijfers: 5 → 0; 2 → 1; 6 → 2; 3 → 3; 0 → 4; 4 → 5; 1 → 6.
Rechter cijfers: 4 → 0; 6 → 1; 1 → 2; 3 → 3; 5 → 4; 0 → 5; 2 → 6.

00	25	13	62	36	41	54
65	11	30	04	53	26	42
43	06	22	50	61	14	35
24	52	46	33	15	60	01
56	63	05	21	44	32	10
31	40	64	16	02	55	23
12	34	51	45	20	03	66

Oorspronkelijke matrix

45						00
					11	
				22		
			33			
		44				
	55					
66						

Gedeeltelijke vulling na permutatie

Het vakje linksboven blijkt nu, na verwisseling van linker en rechter cijfer, overeen te komen met het vakje rechtsboven in de oorspronkelijke matrix, zodat als we na de permutatie spiegelen in de verticale as en cijfers verwisselen, we de oorspronkelijke matrix terug lijken te krijgen.
Natuurlijk moeten we nog controleren of de andere vakjes ook kloppen, en dat blijkt inderdaad zo te zijn.
Conclusie: de eerste twee voorbeelden zijn niet symmetrisch bij spiegeling in de verticale as, het derde voorbeeld wel.

Extra vraag buiten de puntentelling:
Bereken bij elk van de voorbeelden hoeveel verschillende magische vierkanten je kunt maken door permutaties van de cijfers en/of verwisseling van de linker- en rechter cijfers. Daarbij tellen magische vierkanten die gelijk zijn op rotaties en/of spiegeling na niet als verschillend.

Oplossing: In een 7 x 7 GR vierkant zijn op de linker cijfers 7! permutaties mogelijk, en op de rechter cijfers ook. Dat levert $(7!)^2$ verschillende *GR*-vierkanten op. In elk daarvan kunnen we het linker- en rechter cijfer verwisselen, dus 2. $(7!)^2$ = 50.803.200 verschillende *GR*-vierkanten, en dus ook 50.803.200 verschillende magische vierkanten.
Daar kunnen vierkanten bij zitten die elkaars spiegel- of rotatiebeeld zijn.
Voor alledrie onze voorbeelden is dat het geval. Als we vierkanten die gelijk zijn op rotaties en/of spiegelingen niet als verschillend rekenen moeten we voor ons eerste voorbeeld door 4 delen (er zijn twee onafhankelijke afbeeldingen) en voor ons tweede en derde voorbeeld door 2 (er is één afbeelding)
We krijgen dus uit ons eerste voorbeeld 50.803.200 : 4 = 12.700.800 magische vierkanten en uit ons tweede en derde voorbeeld elk 50.803.200 : 2 = 25.401.600
En dat kwam nog maar uit drie voorbeelden. Harm Bakker maakte een computerprogramma dat alle mogelijke *GL's* genereert. Hij vond er 160, en hoewel daarvan een deel elkaars spiegel- of rotatiebeeld zal zijn geeft het aan dat het aantal magische vierkanten dat zo gevonden kan worden heel groot is!

NOOT
[1] Bose, R.C. Shrikhande, S.S & Parker, E.T. (1960). Further results on the construction of mutually orthogonal latin squares and the falsity of a Euler's conjecture. *Canadian Journal of Mathematics* (12), pp.189-203.